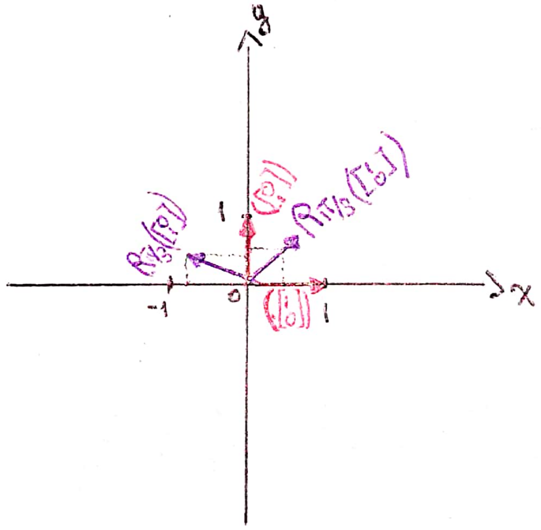
2.21) $R_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $S_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

a) $R_{\pi/3}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

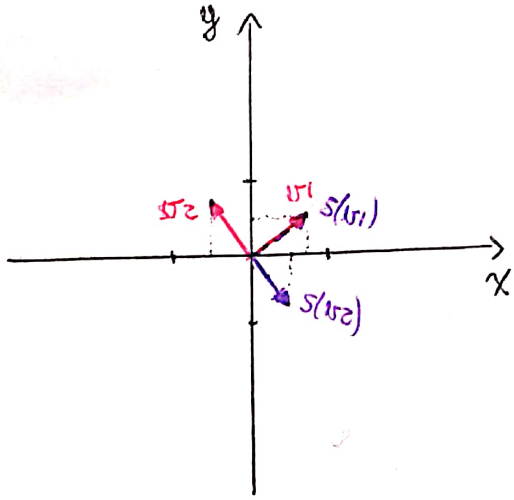
$R_{\pi/3}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\pi/3) \\ \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$



Lo que hace $R_{\pi/3}$ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$ es rotarlos sobre el origen un ángulo $\theta = \pi/3$ en sentido positivo (anti-horario)

b) $S_{\pi/3}\left(\underset{v_1}{\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \underset{S(v_1)}{\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$

$S_{\pi/3}\left(\underset{v_2}{\begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \underset{S(v_2)}{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}}$



~~Lo que hace $S_{\pi/3}$ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$~~

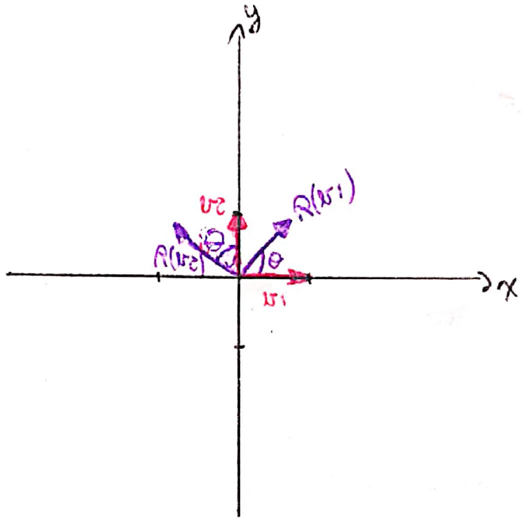
A $S_{\pi/3}$ lo puedo reescribir como:

$$S_{\pi/3}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix}}_{R} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

en donde R es una rotación.
Por lo que a los vectores de $\mathbb{R}^2$ hay que aplicarles primero la transformación U y luego rotar esa imagen un ángulo $\theta = \pi/3$. U aplica una simetría en la dirección de v_2.

c) $R_\theta\left(\underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{bmatrix}$

$R_\theta\left(\underset{v_2}{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$



Lo que hace R_θ con los $v \in \mathbb{R}^2$ es rotarlos en sentido positivo un ángulo θ, con centro de giro el origen.

d) Veo si son LI (Pongo c/vector como columna en una matriz y veo si su det $\neq 0$).

$$\begin{vmatrix}\cos(\theta/2) & -\operatorname{sen}(\theta/2)\\ \operatorname{sen}(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{vmatrix} = \cos^2(\theta/2)+\operatorname{sen}^2(\theta/2)=1\neq 0 \rightarrow \text{es LI}$$

Como genera $\mathbb{R}^2$ y es LI $\rightarrow$ es base. ✓

$$S_\theta\left(\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \operatorname{sen}(\theta/2)\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \operatorname{sen}(\theta/2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta.\cos(\theta/2)+\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\theta/2)\\ \operatorname{sen}\theta\cos(\theta/2)-\cos\theta\operatorname{sen}(\theta/2)\end{bmatrix}$$

$$S_\theta\left(\begin{bmatrix}-\operatorname{sen}(\theta/2)\\ \cos(\theta/2)\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\operatorname{sen}(\theta/2)\\ \cos(\theta/2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos\theta.\operatorname{sen}(\theta/2)+\operatorname{sen}\theta.\cos(\theta/2)\\ -\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\theta/2)-\cos\theta.\cos(\theta/2)\end{bmatrix}$$

e) S_θ primero aplica una simetría en dirección de v_2 que varía con el ángulo θ, que se usa al aplicar la rotación luego de la imagen de la simetría.

g) Efectivamente $O(2, \mathbb{R})$ es cerrado por composiciones ya que al tomar: $R_\alpha \circ R_\beta$, $S_\alpha \circ S_\beta$, $S_\alpha \circ R_\beta$, $R_\beta \circ S_\alpha$, es decir, dos transformaciones de este conjunto (cualesquiera) y las componemos, siempre nos da como resultado otra transformación del conjunto, es decir, una R o una S.

h) $\boxed{R_0 = I_{\mathbb{R}^2}}$

$$R_0\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\operatorname{sen}(0) \\ \operatorname{sen}(0) & \cos(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = I_{\mathbb{R}^2}$$ ✓

i) Para que sea isom. debe ser monom. y epim..

- Veo si R_θ es monom. ($Nu(R_\theta) = \{0\}$):

Puedo expresar R_θ de la siguiente manera:

$$R_\theta = x_1 . (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + x_2 . (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

$$\rightarrow \quad x_1 . (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + x_2 . (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (0,0)$$

Puedo poner los vectores como columnas en una matriz y si el determinante es $\neq 0$, es LI, por lo tanto los x_1, x_2 que cumplen son solo el $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, entonces $Nu(R_\theta) = \{0\}$.

$$\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \neq 0, \text{ es LI.}$$

Por lo tanto $Nu(R_\theta) = \{0\} \rightarrow$ es monomorfismo.

- Veo si S_θ es monom. ($Nu(S_\theta) = \{0\}$)

Puedo expresar S_θ de la siguiente manera:

$$S_\theta = x_1 . (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + x_2 . (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$$

$$\rightarrow x_1 . (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + x_2 . (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta) = (0,0)$$

Hago idem antes:

$$\det \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = -\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = -(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = -1 \neq 0, \text{ es LI.}$$

Por lo tanto $Nu(S_\theta) = \{0\} \rightarrow$ es monomorfismo.

Por T. de la dim:

$$\underbrace{Dim(\mathbb{R}^2)}_{=2} = \underbrace{Dim(Nu(R_\theta \circ S_\theta))}_{=0} + Dim(Im(R_\theta \circ S_\theta)) \longrightarrow$$

$\rightarrow Dim(Im(R_\theta \circ S_\theta)) = 2 \underset{= Dim(\mathbb{R}^2)}{\rightarrow}$ son epimorfismos ya que generan $\mathbb{R}^2$ y ~~[illegible]~~ $Dim(Im) = Dim(\mathbb{R}^2) = 2 \rightarrow Im = \mathbb{R}^2$.

Como R_θ y S_θ son monomorfismos y epimorfismos, son isomorfismos.

• La inversa de girar un ~~[illegible]~~ vector θ grados no es otra cosa que girarlo $-\theta$ grados, por lo tanto:

$$R_\theta^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

y la inversa de una simetría es ella misma ya que $S_\theta S_\theta = I$, entonces:

$$S_\theta^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = S_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$